Rozdział I

Proste przypadki wytrzymałościowe

Przedstawione zostaną zadania dotyczące ściskania, skręcania i zginania prętów wykonanych z materiałów sprężystych i lepkosprężystych. W rozważaniach będziemy również uwzględniać proste modele nieliniowości fizycznej materiału w formie potęgowej. W każdym zadaniu najpierw zostaną podane rozwiązania liniowo-sprężyste, a potem nieliniowe lub lepkosprężyste. Porównanie tych rozwiązań pozwoli uzmysłowić czytelnikowi celowość przyjmowania różnych modeli fizycznych problemu.

W rozważaniach dotyczących prostego rozciągania (rys. 1.0a) posługujemy się zależnościami między wydłużeniami Δl a siłami osiowymi N. Mają one postać:

- liniowa sprężystość

$$\sigma = E\varepsilon,\ \varepsilon = E^{-1}\sigma \quad \text{stąd} \quad \Delta l = \frac{Nl}{EF} \tag{1}$$

- nieliniowa sprężystość o prawie potęgowym

$$\sigma = A\varepsilon^{N},\ \varepsilon = \left(\frac{\sigma}{A}\right)^{n} \quad \text{stąd} \quad \Delta l = \left(\frac{N}{AF}\right)^{n} l \tag{2}$$

- liniowa lepkosprężystość

$$\sigma = E(t) * d\varepsilon,\ \varepsilon = \mathrm{E}^{-1}(t) * d\sigma \quad \text{stąd} \quad \Delta l = \frac{l}{F} N * dE^{-1}(t) \tag{3}$$

gdzie

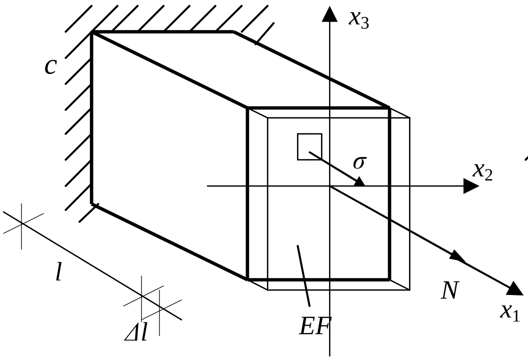
$$f_1 * df_2 = f_2 * df_1 = \int_0^t f_2(t-\tau)df_1(\tau),\ E^{-1}(t) * dE(t) = \delta \tag{4}$$

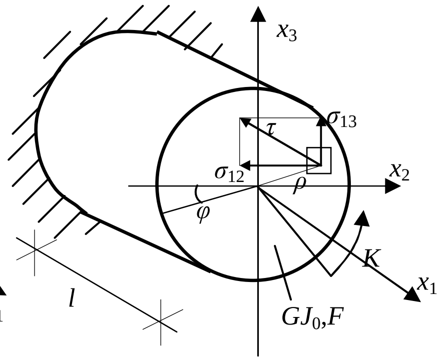
- nieliniowa lepkosprężystość

$$\sigma = (\varepsilon)^{N} * dA(t),\ \varepsilon = (\sigma * dB(t))^{n} \rightarrow \Delta l = \left(\frac{N}{F} * dB(t)\right)^{n} l \tag{5}$$

gdzie

$$B(t) * dA(t) = \delta \tag{6}$$





Rys. 1.0a

Rys. 1.0b

W zagadnieniach skręcania (rys. 1.0b) zależność między momentem skręcającym K, a kątem obrotu przekroju φ przyjmuje formę:

- liniowa sprężystość

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}, \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13}, \tau = 2G\gamma,\ \gamma = \frac{1}{2\mathrm{G}}\tau \rightarrow \varphi = \frac{Kl}{GJ_o} \tag{7}$$

gdzie

$$J_o = \int_F \left[(x_2)^2 + (x_3)^2 \right] dF,\ \tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{K\rho}{J_o} \tag{8}$$

- nieliniowa sprężystość

$$\sigma_{13} = 2\overline{G}(\varepsilon_{13})^N, \varepsilon_{13} = \left(\frac{\sigma_{13}}{2\overline{G}}\right)^n \rightarrow \varphi = \left(\frac{K}{J_0(N+1)}\right)^n l \tag{9}$$

gdzie

$$J_0(N+1) = \int_F \left[(x_2)^{N+1} + (x_3)^{N+1} \right] dF, \quad N = \frac{1}{n} \tag{10}$$

- liniowa lepkosprężystość

$$\sigma_{12} = 2G(t) * d\varepsilon_{12}, \sigma_{13} = 2G(t) * d\varepsilon_{13},$$
$$\tau = 2G(t) * d\gamma,\ \gamma = G^{-1}(t) * d\tau \rightarrow \varphi = \frac{l}{J_0} K * dG^{-1}(t) \tag{11}$$

gdzie

$$2G(t) * dG^{-1}(t) = \delta \tag{12}$$

- nieliniowa lepkosprężystość

$$\sigma_{13} = 2(\varepsilon_{13})^N * d\overline{G}(t), \varepsilon_{13} = \left(\overline{G}^{-1}(t) * d\sigma_{13}\right)^n \rightarrow$$
$$\rightarrow \varphi = \left(\frac{1}{J_0(N+1)} K * d\overline{G}^{-1}(t)\right)^n l \tag{13}$$

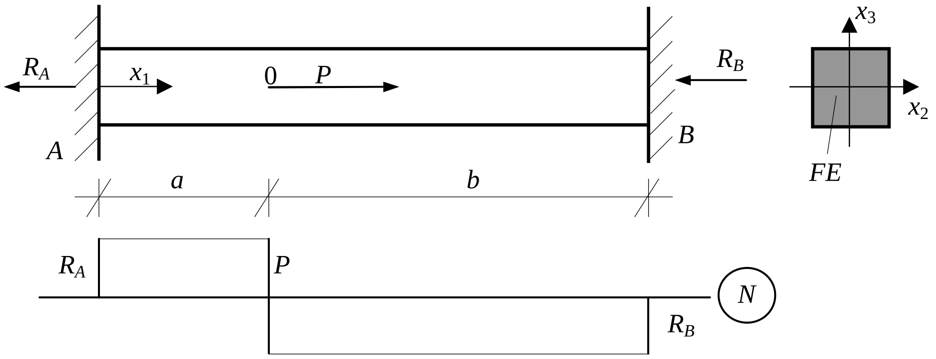
gdzie

$$2\overline{G}(t) * d\overline{G}^{-1}(t) = \delta \tag{14}$$

W podanych wzorach oznaczono symbolami: σ-naprężenie normalne, ε-odkształcenie normalne, $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \tau$-naprężenia tnące, $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \gamma$-odkształcenia postaciowe, $E, A, G, \overline{G}$-moduły Younga i Kirchhoffa w zadaniach sprężystych liniowych i nieliniowych, $E(t), A(t), G(t), \overline{G}(t), E^{-1}(t), B(t), G^{-1}(t), \overline{G}^{-1}(t)$-funkcje relaksacji i pełzania w zadaniach liniowo i nieliniowo lepkosprężystych, $n = 3,5,7,...$ -wykładnik opisujący nieliniowość, $J_0, J_0(N+1)$ - biegunowy moment bezwładności rzędu 2 i $N+1$, Δl - wydłużenie pręta, φ - kąt skręcenia przekroju pręta, l - długość pręta, t - czas, δ - delta Diraca, N - siła osiowa, K - moment skręcający.

ZADANIE 1.1.

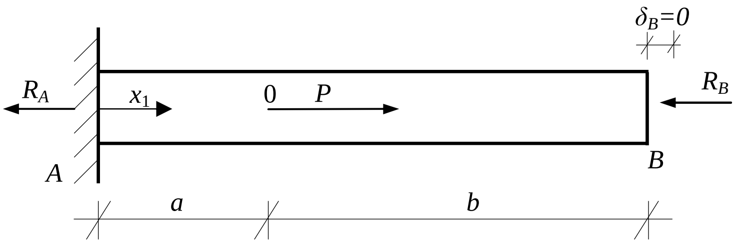
Obustronnie utwierdzony pręt o stałym przekroju i długości *l* podlega działaniu siły osiowej *P* przyłożonej w punkcie 0 (rys. 1.1a). Należy wyznaczyć siły osiowe w pręcie, przy czym zależność naprężenie-odkształcenie należy przyjąć najpierw jako liniowo sprężystą, a później nieliniowo sprężystą i lepkosprężystą. Poszukuje się wartości reakcji R_A i R_B.



Rys. 1.1a

Rozwiązanie:

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Równoważne zadanie statycznie wyznaczalne otrzymamy po odrzuceniu więzów w utwierdzeniu *B* (rys. 1.1b). Dla zachowania równoważności obu zadań wymagamy, by przemieszczenie δ_B w punkcie *B* było równe zeru



Rys. 1.1b

$$\delta_B = 0$$

Z warunku równowagi sumy rzutów sił na oś x_1 wynika, że

$$P - R_A - R_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_B = P - R_A$$

Dodatkowe równanie na reakcje R_A i R_B otrzymamy wykorzystując warunek nierozdzielności

a) W **zadaniu liniowo sprężystym** wydłużenia pręta opisuje równanie

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$$

Stąd warunek nierozdzielności prowadzi do relacji

$$\delta_B = 0 \rightarrow \frac{R_A a}{EF} + \frac{(R_A - P)b}{EF} = 0 \rightarrow R_A(a+b) - Pb = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow R_A = P\frac{b}{a+b} = \frac{P}{1+\frac{a}{b}}$$

Z warunku sumy rzutów sił otrzymamy

$$R_B = P - R_A \rightarrow R_B = P\frac{a}{a+b} = \frac{P}{1+\frac{b}{a}}$$

b) W **zadaniu nieliniowo-sprężystym** wydłużenie pręta dane jest równaniem

$$\Delta l = \left(\frac{N}{AF}\right)^n l$$

Stąd warunek nierozdzielności prowadzi do relacji

$$\delta_B = 0 \rightarrow \left(\frac{R_A}{FA}\right)^n a + \left(\frac{R_A - P}{FA}\right)^n b = 0 \rightarrow \left(\frac{R_A}{FA}\right)^n = \left(\frac{P - R_A}{FA}\right)^n \frac{b}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_A = (P - R_A)\left(\frac{b}{a}\right)^N \rightarrow R_A = P\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^N}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^N} \rightarrow R_A = \frac{P}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^N}$$

Z warunku sumy rzutów sił otrzymamy

$$R_B = P - R_A \rightarrow R_B = \frac{P}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^N}$$

c) W **zadaniu liniowo lepkosprężystym** wydłużenie pręta opisuje zależność

$$\Delta l = \frac{l}{F} N * dE^{-1}(t)$$

Stąd po podstawieniu do warunku nierozdzielności będzie

$$a\left(\frac{R_A}{F}\right) * dE^{-1} + b\left(\frac{R_A - P}{F}\right) * dE^{-1} = 0 \rightarrow \left(\frac{R_A}{F} a + \frac{R_A - P}{F} b\right) * dE^{-1} = 0$$

Następnie na podstawie twierdzenia Titschmarscha stwierdzającego, iż jeżeli iloczyn splotowy pary funkcji jest równy zeru, to jedna z funkcji wchodzących w jego skład musi być równa zeru, otrzymamy rozwiązanie zadania.

$$R_A a + (R_A - P) b = 0 \rightarrow R_A = P \frac{b}{a+b}$$

Wynik w zadaniu lepkosprężystym jest więc identyczny jak w zadaniu sprężystym.

ZADANIE 1.2.

Ściskany pręt składa się z kilku warstw (α) o różnych przekrojach F_α i modułach Younga E_α (rys. 1.2). Należy dla znanej siły osiowej *P*, parametrów geometrycznych F_α i fizycznych E_α warstw określić naprężenia występujące w poszczególnych składnikach pręta. Rozwiązanie należy znaleźć w zakresie liniowo i nieliniowo sprężystym oraz liniowo i nieliniowo lepkosprężystym.

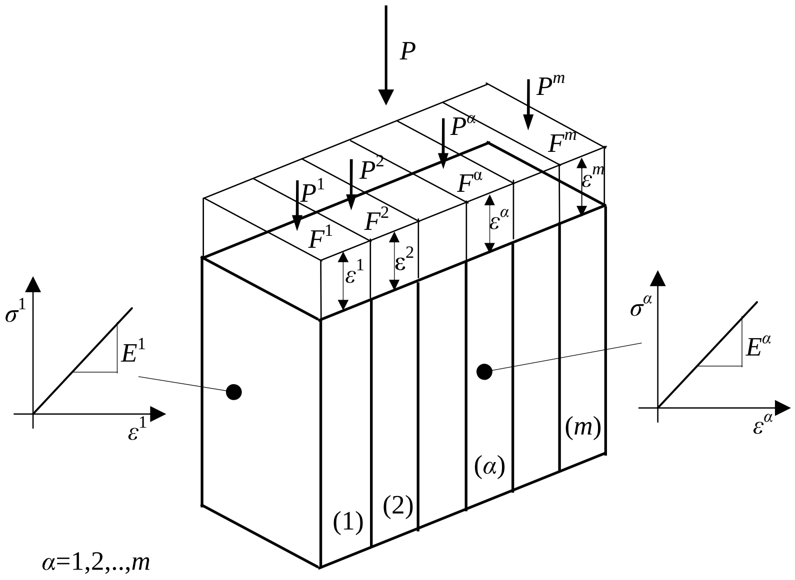
Rozwiązanie:

Zadanie jest wewnętrznie statycznie niewyznaczalne. Naprężenia w poszczególnych składnikach pręta wyznaczymy wykorzystując założenie, iż odkształcenia wszystkich warstw są sobie równe

$$\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = ... = \varepsilon^\alpha = ... = \varepsilon^m = \varepsilon$$

oraz z warunku równoważności układów sił zewnętrznych i wewnętrznych

$$P = \sum_\alpha P^\alpha = \sum_\alpha \sigma^\alpha F^\alpha$$



Rys. 1.2

a) W **przypadku liniowo sprężystym** dla każdej z warstw (α) można zapisać równanie fizyczne

$$\sigma^{\alpha} = E^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\dots,m$$

Stąd otrzymamy warunek równowagi wewnętrznej

$$P = \sum_{\alpha} E^{\alpha}F^{\alpha}\varepsilon^{\alpha} \rightarrow \varepsilon^{\alpha} = \varepsilon = \frac{P}{\sum_{\alpha} E^{\alpha}F^{\alpha}}$$

Znając wartości odkształcenia ε możemy wyznaczyć naprężenie w dowolnej warstwie (α)

$$\sigma^{\alpha} = E^{\alpha}\varepsilon^{\alpha} = \mathrm{E}^{\alpha}\varepsilon \ \rightarrow \ \sigma^{\alpha} = E^{\alpha}\frac{P}{\sum_{\alpha} E^{\alpha}F^{\alpha}}$$

Zauważmy, iż równym odkształceniom poszczególnych warstw odpowiadają w ogólności skoki naprężeń na stykach warstw.

b) W **przypadku nieliniowo sprężystym** dla każdej z warstw (α) można zapisać równanie fizyczne

$$\sigma^\alpha = A^\alpha \left(\varepsilon^\alpha\right)^N, \ \alpha = 1,2,..., m$$

Stąd otrzymamy warunek równowagi wewnętrznej

$$P = \sum_\alpha P^\alpha = \sum_\alpha A^\alpha \left(\varepsilon^\alpha\right)^N F^\alpha \to \left(\varepsilon^\alpha\right)^N = \varepsilon^N = \frac{P}{\sum_\alpha A^\alpha F^\alpha}$$

Znając wartości wyrażenia ε^N możemy wyznaczyć naprężenie w dowolnej warstwie (α)

$$\sigma^\alpha = A^\alpha \left(\varepsilon^\alpha\right)^N = A^\alpha \varepsilon^N \quad \to \quad \sigma^\alpha = \frac{A^\alpha P}{\sum_\alpha A^\alpha F^\alpha}$$

c) W **przypadku liniowo lepkosprężystym** dla każdej z warstw (α) można zapisać równanie fizyczne

$$\sigma^\alpha = E^\alpha * d\varepsilon^\alpha, \ \ \alpha = 1,2,..., m$$

Stąd otrzymamy warunek równowagi wewnętrznej

$$P = \sum_\alpha P^\alpha = \sum_\alpha F^\alpha E^\alpha * d\varepsilon^\alpha \to d\varepsilon^\alpha = d\varepsilon = P * \left(\sum_\alpha F^\alpha E^\alpha\right)^{-1}$$

gdzie

$$\left[\sum_\alpha F^\alpha E^\alpha\right]^{-1} * \left[\sum_\alpha F^\alpha E^\alpha\right] = \delta$$

Naprężenie w warstwie (α) wyliczymy z równania

$$\sigma^\alpha = E^\alpha * d\varepsilon^\alpha = E^\alpha * d\varepsilon \to \sigma^\alpha = E^\alpha * P * \left[\sum_\alpha F^\alpha E^\alpha\right]^{-1}$$

W szczególnym przypadku, kiedy funkcje relaksacji warstwy (α) są postaci

$$E^{\alpha}(t) = E_0^{\alpha} f(t)$$

otrzymamy

$$\sigma^{\alpha} = E_0^{\alpha} f * d\varepsilon^{\alpha} \rightarrow P = \sum_{\alpha} P^{\alpha} = \sum_{\alpha} F^{\alpha} E_0^{\alpha} f * d\varepsilon^{\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow f * d\varepsilon^{\alpha} = f * d\varepsilon = \frac{P}{\sum_{\alpha} F^{\alpha} E_0^{\alpha}}$$

i dalej

$$\sigma^{\alpha} = E_0^{\alpha} f * d\varepsilon^{\alpha} = E_0^{\alpha} f * d\varepsilon \rightarrow \sigma^{\alpha} = \frac{E_0^{\alpha} P}{\sum_{\alpha} F^{\alpha} E_0^{\alpha}}$$

Wynik ten jest więc analogiczny, jak w przypadku liniowo sprężystym.

d) W **przypadku nieliniowo lepkosprężystym** dla każdej z warstw (α) można zapisać równanie fizyczne postaci

$$\sigma^{\alpha} = \left(\varepsilon^{\alpha}\right)^{N} * dA^{\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,m$$

Stąd otrzymamy warunek równowagi wewnętrznej

$$P = \sum_{\alpha} P^{\alpha} = \sum_{\alpha} F^{\alpha} \left(\varepsilon^{\alpha}\right)^{N} * dA^{\alpha} \rightarrow \left(\varepsilon^{\alpha}\right)^{N} = \varepsilon^{N} = P * \left[\sum_{\alpha} F^{\alpha} dA^{\alpha}\right]^{-1}$$

gdzie

$$\left[\sum_{\alpha} F^{\alpha} dA^{\alpha}\right]^{-1} * \left[\sum_{\alpha} F^{\alpha} dA^{\alpha}\right] = \delta$$

Naprężenie w warstwie (α) wyliczymy z równania

$$\sigma^{\alpha} = \left(\varepsilon^{\alpha}\right)^{N} * dA^{\alpha} = \varepsilon^{N} * dA^{\alpha} = P * \left[\sum_{\alpha} F^{\alpha} dA^{\alpha}\right]^{-1} * dA^{\alpha}$$

W szczególności zaś, dla

$$dA^{\alpha}(t) = df(t) A_0^{\alpha}$$

otrzymujemy prostą zależność

$$\sigma^{\alpha} = \left(\varepsilon^{\alpha}\right)^{N} * df \ A_0^{\alpha} \rightarrow P = \sum_{\alpha} P^{\alpha} = \sum_{\alpha} F^{\alpha}\left(\varepsilon^{\alpha}\right)^{N} * df \ A_0^{\alpha} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\varepsilon^{\alpha}\right)^{N} * df = \varepsilon^{N} * df = \frac{P}{\sum_{\alpha} F^{\alpha} A_0^{\alpha}}$$

i dalej

$$\sigma^{\alpha} = \frac{A_0^{\alpha} P}{\sum_{\alpha} F^{\alpha} A_0^{\alpha}}$$

Z porównania rozwiązań tych samych zadań w zakresie liniowo i nieliniowo sprężystym wynika oszacowanie różnicy

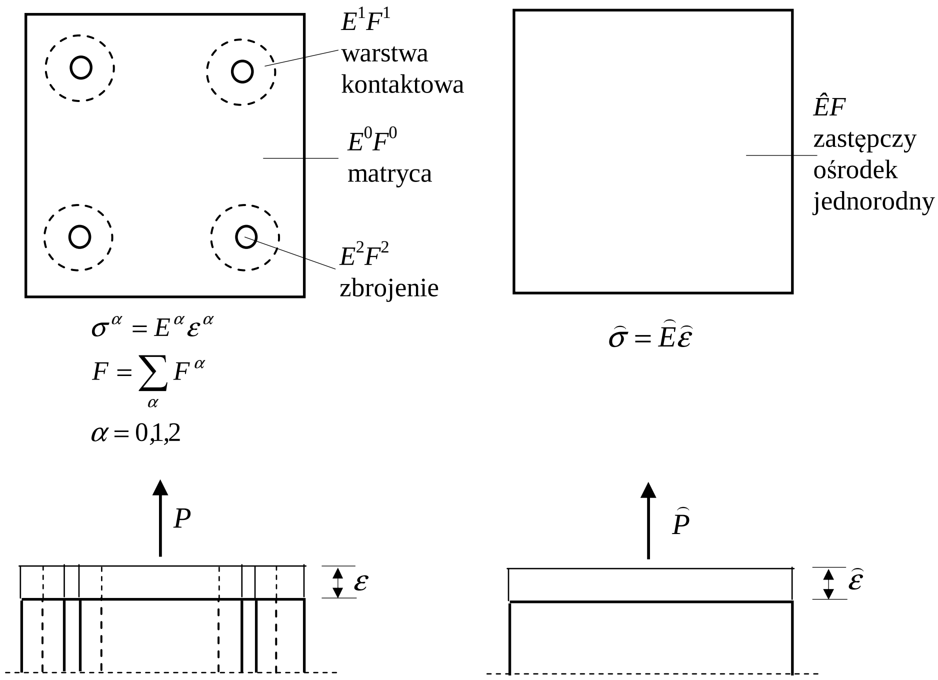
$$\frac{\sigma_E^{\alpha} - \sigma_N^{\alpha}}{\sigma_E^{\alpha}} = \left[P \frac{E^{\alpha}}{\sum_{\alpha} E^{\alpha} A^{\alpha}} - P \frac{A^{\alpha}}{\sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha}} \right] \left[P \frac{E^{\alpha}}{\sum_{\alpha} E^{\alpha} A^{\alpha}} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\frac{E^{\alpha}}{\sum_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha}} - \frac{A^{\alpha}}{\sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha}} \right] \frac{\sum_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha}}{E^{\alpha}} = 1 - \frac{A^{\alpha} \sum_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha}}{E^{\alpha} \sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha}}$$

Wynik ten pozwala m.in. na określenie wpływu przyjętych stałych materiałowych w obu zadaniach.

ZADANIE 1.3.

Analizować będziemy naprężenia i odkształcenia w pręcie zbrojonym, rozciąganym siłą osiową P (rys. 1.3). Pręt składa się z matrycy o sztywności $E^0 F^0$ i zbrojenia o łącznej sztywności $E^2 F^2$. W układzie tym należy jeszcze wydzielić warstwę kontaktową występującą między matrycą a zbrojeniem, która ma zapewnić ciągłość deformacji. Określenie własności mechanicznych tej warstwy, tj. modułu sprężystości E^1 jest celem zadania. Materiał matrycy, zbrojenia i warstwy kontaktowej należy przyjąć jako liniowo sprężysty.



Rys. 1.3. Deformacje w pręcie warstwowym i jednorodnym układzie zastępczym

Rozwiązanie:

Oprócz wyjściowego zadania, w którym występują trzy składniki E^0F^0, E^1F^1, E^2F^2, analizować będziemy jeszcze pewne równoważne zadanie w zastępczym ośrodku jednorodnym o sztywności $\widehat{EF}$ tak dobranej, aby pod wpływem tych samych obciążeń wystąpiły takie same odkształcenia

$P = \widehat{P}$ i $\varepsilon = \widehat{\varepsilon}$

Siłę osiową w pręcie określa relacja

$$P = \sum_\alpha P^\alpha = \sum_\alpha \sigma^\alpha F^\alpha = \sum_\alpha \left(E^\alpha F^\alpha\right)\varepsilon^\alpha, \quad \alpha = 0{,}1{,}2$$

Wówczas warunek nierozdzielności odkształceń poszczególnych składników

$$\varepsilon = \varepsilon^{\alpha}$$

prowadzi do zależności

$$\sigma^{\alpha} = \frac{E^{\alpha} P}{\sum\limits_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha}}$$

W równoważnym pręcie jednorodnym będzie zachodzić

$$\hat{\sigma} = \hat{E}\hat{\varepsilon}$$

a dalej

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{E}} = \frac{\hat{P}}{\hat{E}F}$$

Warunek takich samych odkształceń $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ i obciążeń $P = \hat{P}$ prowadzi do równości

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} \rightarrow \frac{P}{\sum\limits_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha}} = \frac{\hat{P}}{\hat{E}F} \rightarrow \sum_{\alpha} E^{\alpha} F^{\alpha} = \hat{E}F \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{E}F = E^{0} F^{0} + E^{1} F^{1} + E^{2} F^{2}$$

Stąd poszukiwany moduł warstwy kontaktowej wynosi

$$E^{1} = \frac{1}{F^{1}} \left(\hat{E}F - E^{o} F^{o} - E^{2} F^{2} \right)$$

ZADANIE 1.4.

Analizować będziemy jak poprzednio zadanie 1.3. zakładając, iż składniki pręta są nieliniowo sprężyste, a dalej liniowo lepkosprężyste

Rozwiązanie:

a) W **zadaniu nieliniowo sprężystym** siłę osiową *P* określa wyrażenie

$$P = \sum_{\alpha} \sigma^{\alpha} F^{\alpha} = \sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha} \left(\varepsilon^{\alpha} \right)^{N}$$

Zaś warunek nierozdzielności odkształceń $\varepsilon = \varepsilon^{\alpha}$ poszczególnych składników prowadzi do relacji

$$\left(\varepsilon^{\alpha}\right)^{N} = \varepsilon^{N} = \frac{P}{\sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha}}$$

W równoważnym pręcie jednorodnym zachodzić będzie

$$\widehat{\sigma} = \widehat{A}\widehat{\varepsilon}^{N}$$

a dalej

$$\widehat{\varepsilon}^{N} = \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{A}} = \frac{\widehat{P}}{\widehat{A}F}$$

Warunek takich samych odkształceń $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$ i obciążeń $P = \hat{P}$ prowadzi do równości

$$\varepsilon^{N} = \widehat{\varepsilon}^{N} \to \frac{P}{\sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha}} = \frac{\widehat{P}}{\widehat{A}F} \to \sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha} = \widehat{A}F \to$$

$$\to \widehat{A}F = A^{0}F^{0} + A^{1}F^{1} + A^{2}F^{2}$$

Z porównania sztywności $\widehat{A}F$ z sumą sztywności $\sum_{\alpha} A^{\alpha} F^{\alpha}$ można wyznaczyć parametr A^{1} warstwy kontaktowej

$$A^{1} = \frac{1}{F^{1}}\left(\hat{A}F - A^{0}F^{0} - A^{2}F^{2}\right)$$

b) W analogicznym **zadaniu lepkosprężystym** siłę osiową P określa zależność

$$P = \sum_{\alpha} \sigma^{\alpha} F^{\alpha} = \sum_{\alpha} F^{\alpha} E^{\alpha} * d\varepsilon^{\alpha}$$

Zaś warunek nierozdzielności przyrostów odkształceń

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{\alpha}$$

prowadzi do relacji

$$d\varepsilon^{\alpha} = d\varepsilon = P * \left[\sum_{\alpha} F^{\alpha} E^{\alpha}\right]^{-1}$$

gdzie

$$\left[\sum_{\alpha} F^{\alpha} E^{\alpha}\right] * \left[\sum_{\alpha} F^{\alpha} E^{\alpha}\right]^{-1} = \delta$$

W równoważnym pręcie jednorodnym zachodzić będzie

$$\widehat{\sigma} = \widehat{E} * d\widehat{\varepsilon}$$

a dalej

$$d\widehat{\varepsilon} = \widehat{\sigma} * \widehat{E}^{-1} = \frac{\widehat{P}}{F} * \widehat{E}^{-1} = \widehat{P} * \left[F\widehat{E}\right]^{-1}$$

Z przyrównania przyrostów odkształceń $d\varepsilon = d\widehat{\varepsilon}$ i obciążeń $P = \hat{P}$ otrzymamy

$$d\varepsilon = d\widehat{\varepsilon} \rightarrow P * \left[\sum_{\alpha} F^{\alpha} E^{\alpha}\right]^{-1} = \hat{P} * \left[F\hat{E}\right]^{-1} \rightarrow \sum_{\alpha} F^{\alpha}\ E^{\alpha}(t) = F\ \hat{E}(t) \rightarrow$$

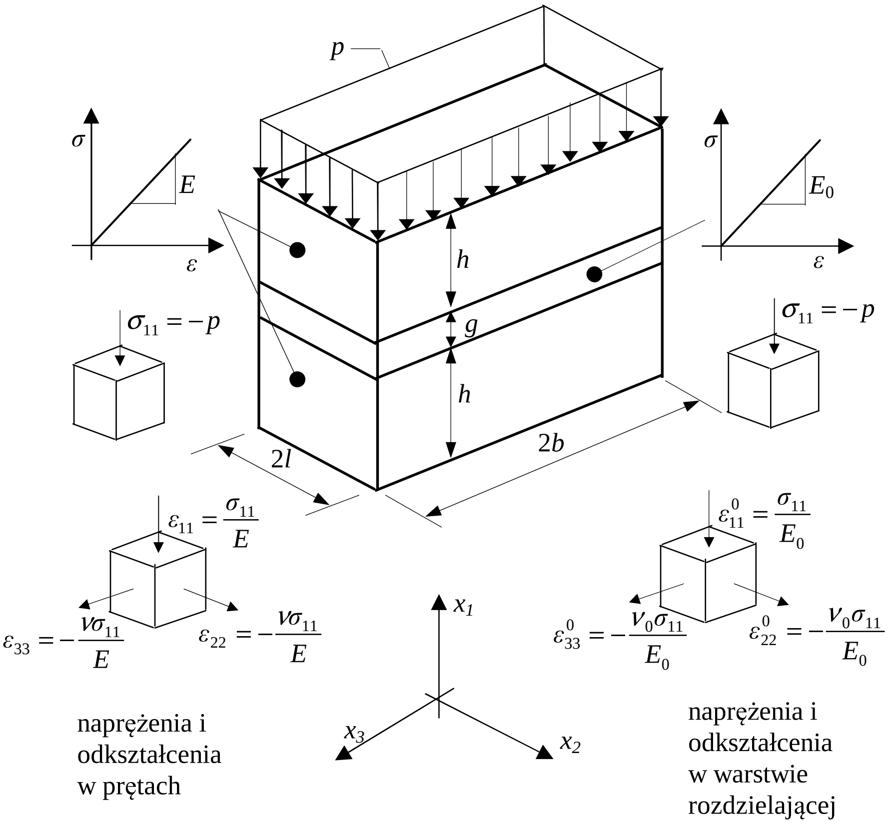
$$\rightarrow F\ \hat{E}(t) = F^{0}\ E^{0}(t) + F^{1}\ E^{1}(t) + F^{2}\ E^{2}(t)$$

Z porównania sztywności $F\ \widehat{E}(t)$ z sumą sztywności $\sum_{\alpha} F^{\alpha}\ E^{\alpha}(t)$ można wyznaczyć poszukiwaną funkcje relaksacji $E^{1}(t)$ warstwy kontaktowej

$$E^{1}(t) = \frac{1}{F^{1}}[F\ \hat{E}(t) - F^{0}\ E^{0}(t) - F^{1}\ E^{1}(t)]$$

ZADANIE 1.5.

Należy określić stan naprężeń w warstwie rozdzielającej dwa pręty ściskane równomiernie rozłożonym obciążeniem p (rys. 1.5). Materiały pręta i warstwy spajającej są liniowo sprężyste.



Rys. 1.5.

Rozwiązanie:

Określimy najpierw z osobna naprężenia i odkształcenia w warstwie rozdzielającej i w prętach.

W prętach naprężenia i wydłużenia wynoszą

$$\sigma_{11} = -p; \quad \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E};$$

$$\Delta l = \varepsilon_{22} 2l = -\frac{\nu\sigma_{11} 2l}{E}; \quad \Delta b = \varepsilon_{33} 2b = -\frac{\nu\sigma_{11} 2b}{E}$$

a w warstwie rozdzielającej

$$\sigma_{11} = -p; \quad \varepsilon_{11}^0 = \frac{\sigma_{11}}{E_0}; \quad \varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{33}^0 = -\frac{\nu_0 \sigma_{11}}{E_0};$$

$$\Delta l_0 = \varepsilon_{22}^0 2l = -\frac{\nu_0 \sigma_{11} 2l}{E_0}; \quad \Delta b_0 = \varepsilon_{33}^0 2b = -\frac{\nu_0 \sigma_{11} 2b}{E_0}$$

Różnice przyrostów długości wynoszą

$$\Delta l_0 - \Delta l = -2\sigma_{11} l \left(\frac{\nu_0}{E_0} - \frac{\nu}{E} \right);$$

$$\Delta b_0 - \Delta b = -2\sigma_{11} b \left(\frac{\nu_0}{E_0} - \frac{\nu}{E} \right)$$

Jeżeli założymy ciągłość odkształceń na stykach warstw to różnice odkształceń nie powinny wystąpić, a wobec tego powstanie dodatkowa siła pozioma X_2 działająca w kierunku osi x_2 oraz X_3 działająca w kierunku osi x_3 zapewniająca ciągłość poziomych odkształceń. W przypadku $E>E_0$ w warstwie rozdzielającej wystąpią siły ściskające a w prętach rozciągające.

Siły X_2 i X_3 w prętach i rozdzielającej je warstwie wywołują następujące wydłużenia i skrócenia:

-na kierunku osi x_2

$$\frac{X_2 2l}{E 2h 2b} + \frac{X_2 2l}{E_0 g 2b} = \Delta l_0 - \Delta l \;\rightarrow$$

$$\rightarrow X_2 \frac{l}{b} \left(\frac{1}{4Eh} + \frac{1}{2E_0 g} \right) = -\sigma_{11} l \left(\frac{\nu_0}{E_0} - \frac{\nu}{E} \right)$$

stąd

$$X_2 = pb \left(\frac{\nu_0}{E_0} - \frac{\nu}{E} \right) \left(\frac{1}{4Eh} + \frac{1}{2E_0 g} \right)^{-1}$$

-na kierunku osi x_3

$$\frac{X_3\,2b}{E\,2h\,2l}+\frac{X_3\,2b}{E_0\,g\,2l}=\Delta b_0-\Delta b\;\rightarrow$$

$$X_3\,\frac{b}{l}\left(\frac{1}{4Eh}+\frac{1}{2E_0 g}\right)=-\sigma_{11}b\left(\frac{\nu_0}{E_0}-\frac{\nu}{E}\right)$$

stąd

$$X_3=pl\left(\frac{\nu_0}{E_0}-\frac{\nu}{E}\right)\left(\frac{1}{4Eh}+\frac{1}{2E_0 g}\right)^{-1}$$

Możemy teraz wyznaczyć dodatkowe naprężenia poziome $\sigma_{22},\sigma_{22}^0$ i $\sigma_{33},\sigma_{33}^0$, które wynoszą

$$\sigma_{22}=\frac{X_2}{4bh},\;\;\sigma_{22}^0=-\frac{X_2}{2bg},\;\;\sigma_{33}=\frac{X_3}{4lh},\;\;\sigma_{33}^0=-\frac{X_3}{2lg}$$

Podane rozważania posiadają przybliżony charakter. Pozwalają one jednak określić wartość naprężeń występujących w płaszczyźnie prostopadłej do działania siły ściskającej, a wynikającą z różnicy własności sprężystych (modułów E i E_0) w prętach i warstwie rozdzielającej.

ZADANIE 1.6.

W układzie prętowym przedstawionym na rysunku (1.6) należy wyznaczyć siły w prętach ukośnych, wykonanych z liniowego oraz nieliniowego materiału sprężystego.